



$3x + 2 = 0$

$5x = 1$

$\frac{2}{x} = 3$

$2x^2 + 2x + 5 = 0$

$x^2 = 3$

$x^2 = -1$

حالت کلی

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 & \rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 0 & \rightarrow x = 3 \end{cases}$

ب) $x^2 + 3x = 4 \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow (x - 1)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$

ج) $x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$

د) $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

هـ) $x^2 = 4 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$


از روش تجزیه معمولاً زمانی استفاده می‌کنیم که $a = 1$ باشد.

یادداشت :

www.e-mahak.com



$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

از روش ریشه‌گیری معمولاً زمانی استفاده می‌کنیم که جمله شامل x در معادله نباشد. ($b=0$) 

مثال : معادلات زیر را حل کنید. 

الف) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

ب) $4x^2 - 25 = 0 \rightarrow 4x^2 = 25 \rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x = \pm \frac{5}{2}$

ج) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

د) $x^3 - 8 = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

هـ) $x^3 + 8 = 0 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x = -2$

یادداشت :

www.e-mahak.com



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a \neq 0)$$

حالت کلی

۱ - انتقال عدد ثابت (c) به طرف دوم معادله

۲ - اضافه کردن مربع نصف ضریب جمله شامل x یعنی $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

۳ - نوشتن اتحاد

۴ - استفاده از ریشه‌گیری

۵ - پیدا کردن x

مثال : معادلات زیر را با روش مربع کامل حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x + \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{ب) } x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x^2 + 4x = 5 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 5 + 4 \rightarrow (x+2)^2 = 9 \rightarrow x+2 = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

یادداشت :

www.e-mahak.com



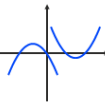
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

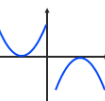
دو ریشه مجزا



$\Delta = 0$

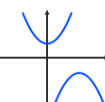
$x = \frac{-b}{2a}$

ریشه مضاعف



$\Delta < 0$

ریشه‌ی حقیقی ندارد.



مثال: معادلات زیر را حل کنید.

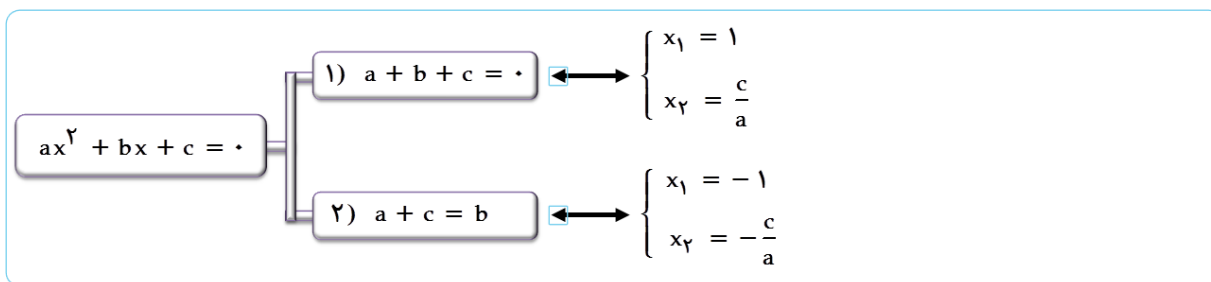
الف) $3x^2 - 8x - 3 = 0 \rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(3)(-3) = 64 + 36 = 100 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2 \times 3} = \frac{8 \pm 10}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

ب) $x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = (6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0 \rightarrow x = \frac{-6}{2} = -3$

ج) $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

یادداشت :

www.e-mahak.com



مثال : معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 3x^2 - 7x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{ب) } 3x^2 + 7x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

مثال : اگر یکی از جوابهای معادله $ax^2 + 3x - 5 = 0$ برابر ۱ باشد، مقدار a را بیابید.

$$\rightarrow a + b + c = 0 \rightarrow a + 3 - 5 = 0 \rightarrow a = 2$$

یادداشت :

www.e-mahak.com



مثال : معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 5x^t + 4 = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow (t-4)(t-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ t=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{ب) } x^2 + 5x^t - 36 = 0 \rightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \rightarrow (t-4)(t+9) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=4 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ t=-9 \rightarrow x^2=-9 \quad \times \end{cases}$$

$$\text{ج) } (x-1)^2 + 5(x-1)^t + 6 = 0 \rightarrow t^2 + 5t + 6 = 0 \rightarrow (t+2)(t+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=-2 \rightarrow x-1=-2 \rightarrow x=-1 \\ t=-3 \rightarrow x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

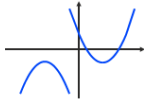
$$\text{د) } x + 5\sqrt{x} - 24 = 0 \rightarrow t^2 + 5t - 24 = 0 \rightarrow (t-3)(t+8) = 0 \rightarrow \begin{cases} t=3 \rightarrow \sqrt{x}=3 \rightarrow x=9 \\ t=-8 \rightarrow \sqrt{x}=-8 \quad \times \end{cases}$$

یادداشت :

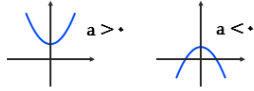
www.e-mahak.com





سهمی




نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ است، به صورت یک سهمی است.



هر سهمی محور y ها را در نقطه‌ی c قطع می‌کند. 

جهت تقعر سهمی به علامت ضریب x^2 بستگی دارد. 

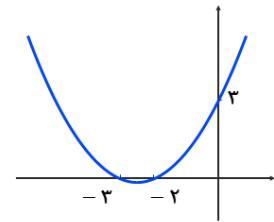
هر سهمی محور x ها را در ریشه‌هایش قطع می‌کند. 

مثال: سهمی $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 3$ را رسم کرده و محل تقاطع با محورهای مختصات را مشخص کنید. 

محل تقاطع با محور x : $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + 3 = 0 \rightarrow \Delta : \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(3) = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$

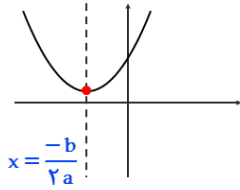
$$\rightarrow x = \frac{-\frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}}{1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

محل تقاطع با محور y : $x=0 \rightarrow y=3 \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$

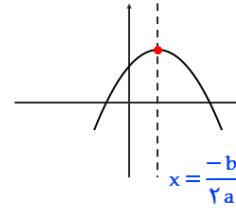


یادداشت:

www.e-mahak.com



$$y = ax^2 + bx + c$$



رأس سهمی

در نمودار تابع درجه‌ی دو به نقطه‌ای که دارای بیشترین مقدار یا کمترین مقدار (برحسب علامت ضریب a) است، رأس سهمی می‌گویند. $\left(x = \frac{-b}{2a}\right)$

⚠ $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \min \\ a < 0 \rightarrow \max \end{cases}$

⚠ عرض رأس سهمی با $-\frac{\Delta}{2a}$ به دست می‌آید. (یا با جایگذاری $-\frac{b}{2a}$ به جای x)

⚠ خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

مثال: رأس سهمی به معادله‌ی $y = -x^2 + ax + 5$ بر روی خط به معادله‌ی $x = 2$ قرار دارد. مقدار a چقدر است؟

$$x = 2 \rightarrow -\frac{a}{2 \times (-1)} = 2 \rightarrow a = 4$$

یادداشت:

www.e-mahak.com



$$y = ax + b$$

$$y = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

(۱) پیدا کردن ریشه

(۲) استفاده از جدول تعیین علامت

x	$x < \frac{-b}{a}$	$\frac{-b}{a}$	$x > \frac{-b}{a}$
y	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

مثال: عبارت $4 - 3x$ را تعیین علامت کنید.

$$4 - 3x = 0 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

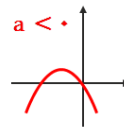
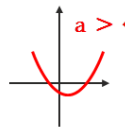
x	$\frac{4}{3}$
$4 - 3x$	+ 0 -

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta > 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

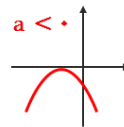
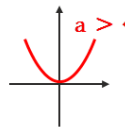
x	x_1	x_2	
y	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a



$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

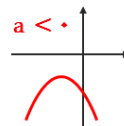
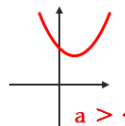
x	$x_1 = x_2$	
y	موافق علامت a	موافق علامت a



$$\Delta < 0$$

ریشه حقیقی ندارد.

x	دلخواه
y	موافق علامت a



یادداشت:



مثال: توابع زیر را تعیین علامت کنید.

$$f(x) = x^2 + x - 2 \rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

x	-2	1
f(x)	+ 0 - 0 +	

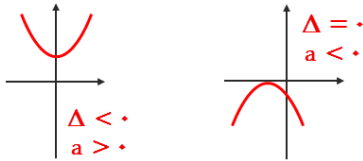
$$g(x) = x^2 - 6x + 9 \rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = 3$$

x	3
g(x)	+ 0 +

$$h(x) = -2x^2 + 5x - 4 \rightarrow \Delta = (5)^2 - 4(-2)(-4) = 25 - 32 = -7$$

x	دلخواه
h(x)	-



برای به دست آوردن شکل تقریبی نمودار از علامت‌های Δ و a کمک می‌گیریم.

مثال: به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x) = 2ax^2 + 5x + 3$ به ازای تمامی مقادیر x منفی است؟

$$\left. \begin{array}{l} \Delta < 0 \rightarrow a \in \left(\frac{25}{24}, +\infty\right) \\ 2a < 0 \rightarrow a < 0 \rightarrow a \in (-\infty, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \left(\frac{25}{24}, +\infty\right) \cap (-\infty, 0) = \emptyset \quad \text{هیچ مقدار } a$$

$$\Delta = 5^2 - 4(2a)(3) = 25 - 24a < 0 \rightarrow 24a > 25 \rightarrow a > \frac{25}{24} \rightarrow a \in \left(\frac{25}{24}, +\infty\right)$$

یادداشت:

www.e-mahak.com



$$f(x) = (x - 1)(x + 2)$$

{	$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: #fce4d6;">x</td><td style="background-color: #fce4d6;">1</td></tr> <tr><td style="background-color: #fce4d6;">x - 1</td><td style="background-color: #fce4d6;">- 0 +</td></tr> </table>	x	1	x - 1	- 0 +
	x	1				
x - 1	- 0 +					
$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="background-color: #fce4d6;">x</td><td style="background-color: #fce4d6;">-2</td></tr> <tr><td style="background-color: #fce4d6;">x + 2</td><td style="background-color: #fce4d6;">- 0 +</td></tr> </table>	x	-2	x + 2	- 0 +	
x	-2					
x + 2	- 0 +					

 \Rightarrow

x	-2	1
x - 1	- 0 +	- 0 +
x + 2	- 0 +	+ 0 +
y	+ 0 -	0 +

⚠ در تعیین علامت توابعی که به صورت حاصل ضرب چند عبارت هستند، باید به دامنهی تابع دقت کرد.

$$g(x) = \frac{x - 2}{x + 1} \rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	-1	2
x - 2	- 0 +	- 0 +
x + 1	- 0 +	+ 0 +
y	+ 0 -	0 +

یادداشت :

www.e-mahak.com